Exercice 1. Prouver que l'on peut calculer un déterminant « par blocs » :

$$\text{Si}\quad M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \qquad \det(M) = \det A \det B,$$

où $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et 0 est la matrice nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, où $n = p+q$.

En déduire que le polynôme caractéristique de A divise le polynôme caractéristique de M.

Indication : Utiliser le théorème fondamental de la théorie des déterminants (*l'unicité à scalaire près d'une application multilinéaire alternée* $(\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$). *Vous pouvez vous inspirer de la preuve du Corollaire 7.4.2 dans le polycopié 1.*

Exercice 2. (a) Prouver que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

(b) Rappeler ce qu'est la *multiplicité géométrique* d'une valeur propre.

(c) Prouver que si A et B sont sont deux matrices semblables et λ est une valeur propre, alors

$$\mathrm{multgeom}_\lambda(A) = \mathrm{multgeom}_\lambda(B).$$

Exercice 3. Résoudre la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$x_{n+2} = -4x_n + 5x_{n+1},$$

avec conditions initiales $x_0 = 1$, $x_1 = 3$.

Exercice 4. Résoudre la récurrence linéaire d'ordre 3 :

$$x_{n+3} = -2x_n + x_{n+1} + 2x_{n+2},$$

avec conditions initiales $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$.

Exercice 5.

1. Rappeler ce qu'est la *matrice des cofacteur* $\mathrm{Cof}(A)$ d'une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; puis expliquer comment utiliser cette matrice pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
2. Calculer la matrice des cofacteurs des matrices suivantes :
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Prouver que pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$\det(A + t\,E_{ij}) = \det(A) + t\,c_{ij},$$
où on note $(c_{ij}) = \mathrm{Cof}(A)$.
4. Notons $X = \{x_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice variable à coefficients réels et considérons le déterminant comme une fonction $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Que vaut la dérivée partielle
$$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(X) \ ?$$
5. (optionnel) Écrire un programme en Python qui calcule la matrice dont l'input est une matrice carrée de taille $n \times n$ et l'output est sa matrice des cofacteurs.

Exercice 6. On considère la matrice réelle
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Prouver que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A.
2. Quelle est la multiplicité géométrique de cette valeur propre ?

Exercice 7. Supposons qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrive $A = Q + N$ où N est une matrice nilpotente d'ordre $\leq m$ qui commute avec Q, i.e. $NQ = QN$.

Montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$A^k = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{k}{j} Q^{k-j} N^j = Q^k + kQ^{k-1}N + \binom{k}{2} Q^{k-2} N^2 + \cdots + \binom{k}{m-1} Q^{k-m+1} N^{m-1}.$$
(On rappelle qu'une matrice carrée N est nilpotente d'ordre $\leq m$ si $N^m = 0$).

Exercice 8. Soit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles qui sont indéfiniment dérivables. On note $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation : $D(f) = f'$.

1. Prouver que tout nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de D.
2. Prouver ensuite rigoureusement que λ est de multiplicité géométrique égale à 1.

Indication : Si f et g sont deux vecteurs propres associés à la valeur propre λ, et si f est partout non nulle (i.e. on a $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors on peut appliquer D à la fonction (g/f).

Exercice 9. Trouver les vecteurs propres et les espaces propres de l'opérateur $T : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ défini par

$$T\varphi(x) = \int_0^1 e^{5x-s}\varphi(s)ds.$$

Pour chaque valeur propre donner la multiplicité géométrique.